

## 黒体輻射 (black-body radiation)

量子力学を開いたプランク (Max Planck, 1858-1947) が熱力学の研究を志し、教授から「もう熱力学には、何もすることは残っていない」と言われたのは19世紀末のことであった。しかし実際には、ミクロの世界の力学体系はマクロの世界とは全く違っていたのである。そのことは、プランクが黒体輻射の問題と取り組む中で明らかとなった。

黒体 (black body) という言葉を聞いたことがあるだろうか。物体が例えば赤く見えるのは、それを光で照らした時に赤以外の波長の光が吸収され、赤の光だけが戻ってくるからである。黒い物体は、したがって、あらゆる波長の光を吸収する物体である。この様な物体を黒体という。一方、この黒体を高い温度に熱すると、黒体からは色々な波長の光が放出される。それは、溶鉱炉の中の鉄が赤く見えたり、裸電球の色が黄色く見えたり、また、太陽からの光が白く輝いて見えるのと同じである。溶鉱炉の鉄やタングステン電球のフィラメントは近似的に黒体と考えてよく、その色の違いは黒体の温度の違いを表している。

一方、光は電磁波であるが、その色は電磁波の波長あるいは振動数を基にして関係づけられる。図 1-1 は電磁波の波長・振動数と色の関係を示したもので

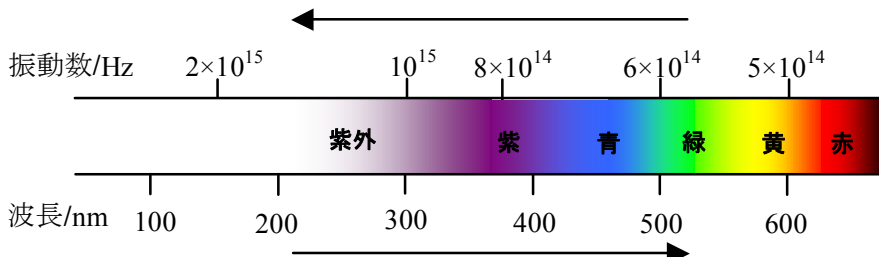


図 1.1 電磁波の波長・振動数と色の関係

ある。白く光る灼熱の溶鉱炉は高い振動数の光をだし、黄色味を帯びたタングステンランプは低い振動数の光を出している。すなわち、温度の高い黒体は高い振動数の光を放っているのである。

図 1-2 は、黒体の 3 つの温度について、輻射される光の強度と振動数との関係を示したものである。いずれの温度においても、振動数の低い光と高い光は共に輻射強度は小さく、中間に強度の極大がある。温度が高くなるに従って、全輻射強度と極大振動数は大きくなる。6000 K での強度分布は、ちょうど、太陽から地球に降り注ぐ光の振動数の分

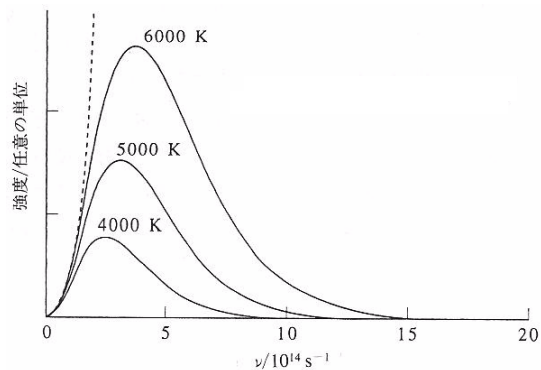


図 1.2 黒体輻射強度の振動数および温度依存性

布に相当する。太陽の表面温度が 6000 K とされる所以である。

プランクが取り組んだ問題は、ある温度の黒体から放射される光の波長がどのように分布しているかを、数学的に表すことであった。当時、あらゆる問題を解析できると考えられていた古典力学・電磁気学・統計力学を使って得られる光の強度分布は図 1-2 の破線のようになり、高振動数側で強度が低下することをどうしても再現できなかった。これは、黒体が 3次元で振動していると考えると、振動数の高い方が多様な振動様式（振動モード）が可能となり、1つの振動モード当たりの放射強度が同じである場合には、より強い光を放射出来るからである。

これに対してプランクは、高い振動数ほど、1振動モード当たり放射できる光の強度が小さくなると考えた。もし、振動数 $\nu$ で振動する光のエネルギーが、 $h$ を定数として

$$E=h\nu \quad (1.1)$$

で表されると仮定すると、そのような状況が生まれる。すなわち、振動数が大きくなると、温度  $T$  の黒体が持っているエネルギーではその振動モードを振動させるに十分なエネルギー  $h\nu$  が供給できなくなってしまう。その結果、高い振動数を持つ振動モードからは光が放射できなくなるであろう。こうして、プランクは図 1.2 の曲線を見事に再現することに成功した。黒体輻射の式の導き方に興味のある人は、次節にもう少し定量的な説明が与えてあるので、そちらを参照して欲しい。

ここで大切なことは、(1.1)式の仮定である。古典力学に従えば、振動子の持つエネルギーは、振動数に関係なく、その振幅で決まり、振動子はどのようなエネルギーの値でもとれることになる。しかし、プランクの仮定に従えば、振動子のエネルギーを本質的に決めるものは振動数であり、「振動数 $\nu$ の振動子が持てるエネルギーは、 $h\nu$ の整数倍にかぎる。」ということになる。この定数  $h$  は、プランク定数と呼ばれる。この仮定が量子力学の世界を開いた。

**黒体輻射の式の導出（その概略）**

古典力学では実験結果を説明することの出来なかった、黒体輻射強度の振動数依存性が、プランクの量子仮定によって、どのように解決したかを見てみよう。式の導出をきちんと行くと多くのページを要するので、ここでは半定量的な説明に止めるが、さらに知りたい人は章末の参考書を参照してほしい。

**(a) 振動モードの数**

まず、振動数の高い振動ほど振動モードが多いことを示そう。長さ  $l$  の 1 次元の入れ物に入ることの出来る定在波は、 $n_x$  を整数として  $l = n_x(\lambda/2)$  を満たすことが必要であった。1 辺が  $l$  の立方体の空洞の場合には、 $x$  方向、 $y$  方向、 $z$  方向の 3 方向について同様の条件が成り立つ必要がある。

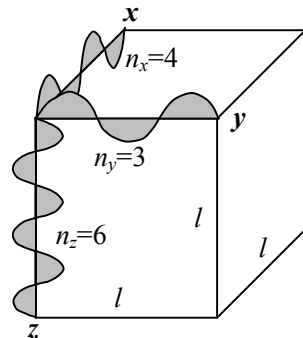


図 1.3 1 辺  $l$  の立方体中の振動モードの例

$$l = n_x(\lambda/2), l = n_y(\lambda/2), l = n_z(\lambda/2) \quad (n \text{ は整数}) \quad (1.1)$$

結果として生ずる 3 次元の波の振動数は、光速を  $c$  とすると

$$v^2 = \left(\frac{c}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{c}{2l}\right)^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad (1.2)$$

を満たす  $(n_x, n_y, n_z)$  の組からなる (図 1.3 参照)。この特定の  $(n_x, n_y, n_z)$  の組を振動モードと呼んでいる。例えば 2 次元での振動モード  $(1, 0)$ 、 $(0, 1)$  は図 1.4 のように書ける。このような振動モードは、次元が上がるほど、振動数が (エネルギーが) 大きくなるほど増える。

	1 次元	2 次元	3 次元
$n^2=1$	(1)	(1,0) (0,1)	(1,0,0) (0,1,0) (0,0,1)
$n^2=25$	(5)	(5,0) (0,5) (3,4) (4,3)	(5,0,0) (0,5,0) (0,0,5) (3,4,0) (0,3,4) (3,0,4) (4,3,0) (0,4,3) (4,0,3)

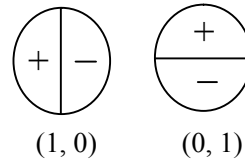


図 1.4 振動モードの例

$n_x^2 + n_y^2 < R^2$  を満たすような自然数の組  $(n_x, n_y)$  の個数を求めるには、図 1.5 に示す  $1/4$  円内にある格子点の数を求めればよい。格子点は  $1 \times 1$  の面積毎に 1 個あるので、単に  $1/4$  円の面積を求めればよいことになる。すなわち、 $\pi^2/4$  個の  $(n_x, n_y)$  の組がある。

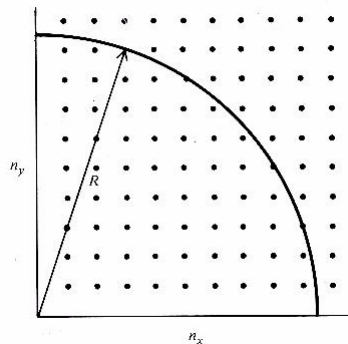


図 1.5 格子点の求め方

振動数  $v$  の付近、 $v \sim v+dv$ 、にある振動モード

の数（これを振動数 $\nu$ の状態密度といい、 $\rho(\nu)$ と書く）を求めるために、 $0-\nu$ の総ての振動数に対応する $(n_x, n_y, n_z)$ の組の数をまず求めて、これを微分する方法をとる。 $0-\nu$ の総ての振動数を与える $(n_x, n_y, n_z)$ の組の数は、(1.2)が球の式を表しているので半径 $2l\nu/c$ の球の中にある格子点の数に等しい。したがって $(n_x, n_y, n_z)$ が自然数であるような格子点の数は球の体積の $1/8$ にあたる。

$$\frac{4}{3}\pi\left(\frac{2l\nu}{c}\right)^3 \times \frac{1}{8} \times 2 = \frac{8\pi\nu^3}{3c^3}V \quad (1.3)$$

なお、振動数 $\nu$ の光は、2つの偏光方向を持っているので2倍してある。

(1.3)式を微分すると、振動数 $\nu \sim \nu+d\nu$ の状態密度が計算できて、

$$\rho(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}d\nu \quad (1.4)$$

となる。 $\rho(\nu)$ は $\nu^2$ に比例しており、振動数 $\nu$ が大きいほど、振動モードの数が多くなることが解る。ここで、輻射強度の振動数依存性を求めるには、振動数 $\nu$ を持った各振動が1振動モード当たりどの位のエネルギーを放出するかを知る必要がある。すなわち、振動数 $\nu$ を持つ振動モード一つあたりの平均エネルギー $\bar{\varepsilon}$ （～放射エネルギー）が求まると、振動数 $\nu$ の光の放射エネルギーの大きさは、

$$I(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\bar{\varepsilon}d\nu \quad (1.5)$$

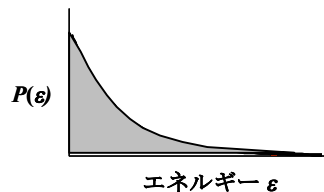
で与えられる。

## (b) ボルツマン分布

振動モード一つあたりの平均エネルギーを求めるためには、特定の振動モードで振動している多数の振動子（バネと考えておこう）の集団を考えて、それらの持っているエネルギーの平均値を求める。集団の中の各振動子は、低いエネルギーから高いエネルギーまで様々なエネルギーを持って振動しているが、その平均のエネルギーの大きさは、第2部で学ぶように、温度が決まると自動的に決まる。温度が $T$  Kであるとき、大きさ $\varepsilon$ のエネルギーを持っている振動子の割合、言い換えればエネルギーの分布、を測定すると、図1-6のようになっている。この分布は「ボルツマン分布」と呼ばれており、エネルギーの大きな振動子ほどその数が少ないという特徴がある。

ボルツマン分布を数式で表すと、

$$P(\varepsilon) = \frac{1}{k_B T} \exp(-\varepsilon/k_B T) \quad (1.6)$$



と表される。分布がこのように表される場合、エネルギーの平均値は

図1-6 ボルツマン分布

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon} &= \int_0^{\infty} \varepsilon P(\varepsilon) d\varepsilon \\ &= \frac{1}{k_B T} \int_0^{\infty} \varepsilon \exp(-\varepsilon / k_B T) d\varepsilon = k_B T\end{aligned}\quad (1.7)$$

と与えられるから、振動モード当たりの平均エネルギーは  $k_B T$  であると考えて良い。これを(1.5)式に代入すると

$$I(\nu) d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T d\nu \quad (1.8)$$

となり、 $I(\nu)$ は $\nu$ の増加と共に急激に増加する。という古典的な結果が得られる。

さて、それでは、プランクが仮定した量子的な振動子の平均エネルギーはどうか。プランクの仮定によれば、振動数 $\nu$ で振動する振動子は  $h\nu$ のエネルギーを持つ。従って、このような振動子の集団では、各振動子が持てるエネルギーは  $h\nu$ 、 $2h\nu$ 、 $3h\nu$ 、...などの離散的な値となる。温度  $T$ の集団では、このような場合もボルツマン分布が成り立っており、図 1-7 に示すように、

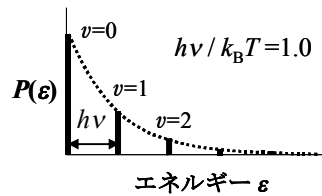


図 1-7 量子振動子のボルツマン分布

$$P(nh\nu) = C \exp(-nh\nu / k_B T)$$

となる。

このときの平均エネルギーは、平均値を求める式に従って（基礎章 A を参照のこと）、

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon} &= \frac{0h\nu \exp\left(-\frac{0h\nu}{k_B T}\right) + h\nu \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right) + 2h\nu \exp\left(-\frac{2h\nu}{k_B T}\right) + 3h\nu \exp\left(-\frac{3h\nu}{k_B T}\right) + \dots}{\exp\left(-\frac{0h\nu}{k_B T}\right) + \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right) + \exp\left(-\frac{2h\nu}{k_B T}\right) + \exp\left(-\frac{3h\nu}{k_B T}\right) + \dots} \\ &= \frac{h\nu \left[ \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right) \right] + 2h\nu \left[ \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right) \right]^2 + 3h\nu \left[ \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right) \right]^3 + \dots}{1 + \left[ \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right) \right] + \left[ \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right) \right]^2 + \left[ \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right) \right]^3 + \dots}\end{aligned}\quad (1.9)$$

分母は  $\exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right)$  を公比とする等比級数の和であり、その値は

$\left(1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right)\right)^{-1}$  となる。一方、分子は分母の各項を  $\nu$  で微分して  $(-k_B T\nu)$

を掛けたものの和なので、逆に合計したものを微分して  $-k_B T\nu$  をかけると、

$$-k_B T v \frac{d \left( 1 - \exp \left( -\frac{h\nu}{k_B T} \right) \right)^{-1}}{d\nu} = h\nu \exp \left( -\frac{h\nu}{k_B T} \right) \left( 1 - \exp \left( -\frac{h\nu}{k_B T} \right) \right)^{-2}$$

これらを用いて、

$$\bar{\varepsilon} = \frac{h\nu \exp \left( -\frac{h\nu}{k_B T} \right) \left( 1 - \exp \left( -\frac{h\nu}{k_B T} \right) \right)^{-2}}{\left( 1 - \exp \left( -\frac{h\nu}{k_B T} \right) \right)^{-1}} = \frac{h\nu}{\exp \left( \frac{h\nu}{k_B T} \right) - 1} \quad (1.10)$$

が求まる。振動数の増加に伴う平均エネルギーの変化を、古典振動子と量子振動子で比べたものが図 1-8 であり。量子振動子では  $\nu$  の増加と共に急速に減少することが分かる。

### (c) 黒体輻射の式

これで準備が整ったので、古典および量子論に基づく黒体輻射の式を導くことが出来る。すなわち(a)で求めた式に、振動数  $\nu$  を持つ振動子の平均エネルギー  $\bar{\varepsilon}$  を代入すればよい。

$$I(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \bar{\varepsilon} d\nu$$

古典論に基づくと  $\bar{\varepsilon} = k_B T$  であるから、

$$I(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T d\nu \quad (1.8)$$

となり、輻射強度は振動数の増加と共に  $\nu^2$  に比例して単調に増加する。

一方、量子論に基づくと、(b)で求めた平均エネルギーを代入して

$$I(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{\exp \left( \frac{h\nu}{k_B T} \right) - 1} d\nu \quad (1.11)$$

となる。この式は  $\nu \rightarrow \infty$  に伴って分母が無限大に近づくため 0 に漸近し、高振動数側で、再び強度が減少する。実際、この式は見事に図 1.2 の曲線を再現している。

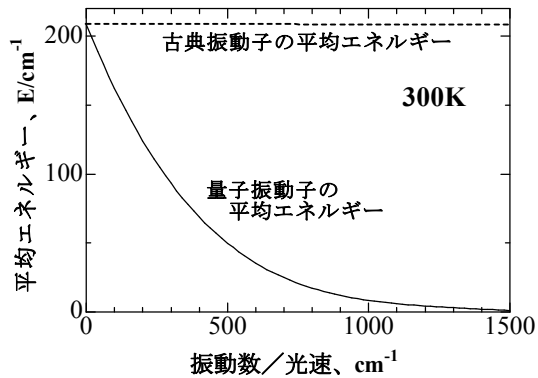


図 1-8 300K の振動子集団の持つ平均エネルギー。古典振動子と量子振動子の違い。